

Tugas 1 Analisis Vektor (C)

1. Diketahui θ adalah sudut antara dua vektor $\vec{a}, \vec{b}$ dengan $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$. Tunjukkan bahwa

$$\tan \theta = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$$

- Dot Product

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$$

- Cross Product

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

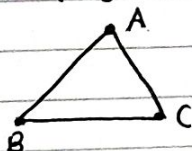
Ingat $\rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ sehingga :

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta \cdot \frac{1}{\cos \theta} \\ &= \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \cdot \frac{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \\ &= \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa : $\tan \theta = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$

2. Hitung luas segitiga dengan titik-titik sudutnya $P(1, 5, -2)$, $Q(0, 0, 0)$, $R(3, 5, 1)$

misal, kita punya 3 titik A, B, dan C.



Maka, sesuai rumus luas segitiga dengan sinus, didapatkan :

$$L_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A$$

Dengan cara yang sama, diperoleh

$$L_{\Delta PQR} = \frac{1}{2} \|\vec{QP}\| \|\vec{QR}\| \sin$$

$$= \frac{1}{2} \|\vec{QP} \times \vec{QR}\|$$

$$\vec{QP} = (1, 5, -2)$$

$$\vec{QR} = (3, 5, 1)$$

$$\begin{aligned} \vec{QP} \times \vec{QR} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 5\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k} - \hat{j} + 10\hat{i} - 15\hat{k} \\ &= 15\hat{i} - 7\hat{j} - 10\hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{QP} \times \vec{QR}\| &= \sqrt{(15)^2 + (-7)^2 + (-10)^2} \\ &= \sqrt{225 + 49 + 100} \\ &= \sqrt{374} \end{aligned}$$

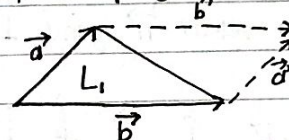
Sehingga,

$$\begin{aligned} L_{\Delta PQR} &= \frac{1}{2} \|\vec{QP} \times \vec{QR}\| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{374} \text{ satuan luas} \end{aligned}$$

- 3). Hitung luas jajaran genjang yang dibangun oleh vektor - vektor :

$$\vec{u} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} \quad \vec{v} = 3\hat{j} + \hat{k}$$

$\rightarrow$ misal, kita punya $\vec{a}$ dan $\vec{b}$



maka, luas jajaran genjang tersebut adalah dua kali luas segitiga yang dibentuk $\vec{a}$ dan $\vec{b}$.

$$\begin{aligned} L_{\square} &= 2 \cdot L_{\Delta} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \|\vec{a} \times \vec{b}\| \right) \\ &= \|\vec{a} \times \vec{b}\| \end{aligned}$$

Dengan konsep yang sama, kita dapat terapkan pada vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$. Sehingga, didapatkan :

$$\begin{aligned} L_{\square} &= \|\vec{u} \times \vec{v}\| \\ \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\hat{i} + 3\hat{k} - (\hat{j} + 6\hat{i}) \\ &= -7\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \times \vec{v}\| &= \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{49 + 1 + 9} \\ &= \sqrt{59} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{59} \rightarrow L_{\square} = \sqrt{59} \text{ satuan luas}$$

4. Tentukan persamaan segmen garis dalam bentuk persamaan simetrik melalui dua titik $P(2, 4, -1)$ dan $Q(5, 0, 7)$!
- diperoleh : $\vec{PQ} = (3, -4, 8)$

$$x = a_p + a_{pq}t \quad y = b_p + b_{pq}t \quad z = z_p + z_{pq}t$$

$$x = 2 + 3t \quad y = 4 - 4t \quad z = -1 + 8t$$

↓

$$t = \frac{x-2}{3}$$

$$t = \frac{y-4}{-4}$$

$$t = \frac{z+1}{8}$$

Sehingga, diperoleh persamaan simetrik :

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z+1}{8}$$

5. Selidiki apakah tiga vektor berikut sebidang :

$$\vec{a} = (1, -2, 1) ; \vec{b} = (3, 0, -2) ; \vec{c} = (2, 2, -4)$$

→ Untuk menentukan apakah vektor tersebut sebidang, coba operasikan salah dua vektor dengan cross product untuk menghasilkan sebarang vektor $\vec{n}$ yang $\perp$ kedua vektor tadi.

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{n} &= \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - (-2\hat{j} - 6\hat{k}) \\ &= 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k} \end{aligned}$$

→ Lalu, apabila ketiga vektor tersebut sebidang vektor $\vec{n}$ haruslah tegak lurus dengan vektor $\vec{c}$. Dapat dicek dengan operasi dot product. Apabila $\vec{c} \cdot \vec{n} = 0$, maka vektor $\vec{c}$ dan $\vec{n}$ saling $\perp$

$$\vec{c} \cdot \vec{n} = (2, 2, -4) \cdot (4, 5, 6)$$

$$= 8 + 10 - 24$$

$$= -6 \rightarrow \vec{c} \cdot \vec{n} \neq 0$$

Maka dapat dipastikan $\vec{a}$, $\vec{b}$, dan $\vec{c}$ tidak sebidang.

Jawab = TIDAK SEBIDANG

6. Tentukan persamaan bidang dalam R^3 yang melalui titik pangkal koordinat dan sejajar bidang $4x - 2y + 7z + 12 = 0$

Jawab : $4x - 2y + 7z = 0$

Persamaan bidang tersebut sejajar dengan bidang $4x - 2y + 7z + 12 = 0$, serta melewati titik pangkal $(0, 0, 0)$